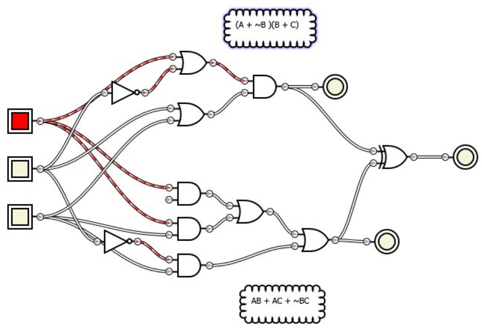
Esercizi di sintesi - Soluzioni

1. Si dimostri che (A + ~B)(B + C) = AB + AC + ~BC. Si implemementino in GateSim i due circuiti corrispondanti e se ne verifichi l'eguaglianza.

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{(A + \sim B)(B + C)} & \\
&= \mathbf{A(B{+}C) + \sim B(B{+}C)} & \quad (x+y)z=xz+yz \\
&= \mathbf{AB + AC + \sim BB + \sim BC} & \quad (x+y)z=xz+yz \\
&= \mathbf{AB + AC + 0 + \sim BC} & \quad \sim xx=0 \\
&= \mathbf{AB + AC + \sim BC} & \quad x+0=x
\end{aligned}
$$

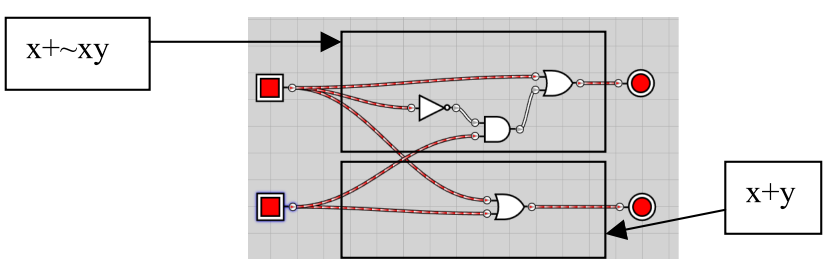


2. Si dimostri che x + ~xy = *x* + *y*. Si implementino in gatesim i due circuiti corrispondenti a x + ~xy e *x* + *y* e si verifichi la correttezza del risultato.

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{x + \sim xy} & \\
&= \mathbf{x + xy + \sim xy} & \quad x=x+xz \\
&= \mathbf{x + (x + \sim x)y} & \quad xy+xz=x(y+z) \\
&= \mathbf{x + 1y} & \quad x+\sim x=1 \\
&= \mathbf{x + y} & \quad 1x=x
\end{aligned}
$$

Il circuito Gatesim:



Il secondo circuito è migliore del primo sia rispetto al cammino critico (2 per il primo, 1 per il secondo) sia rispetto al costo circuitale (2 per il primo, 1 per il secondo).

Massimo Marchi – marchi@dsi.unimi.it

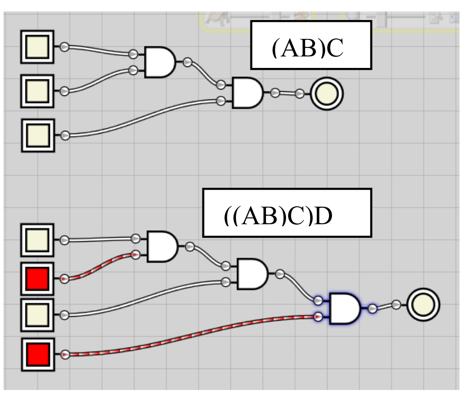
3. **Si ricavi la tabella della verità delle seguenti funzioni: A+B+C, A+B+C+D (or a 3 e 4 ingressi). Si implementi il modulo corrispondente in Gatesim e lo si salvi. Si faccia lo stesso per le funzioni AND a 3 e 4 ingressi.**

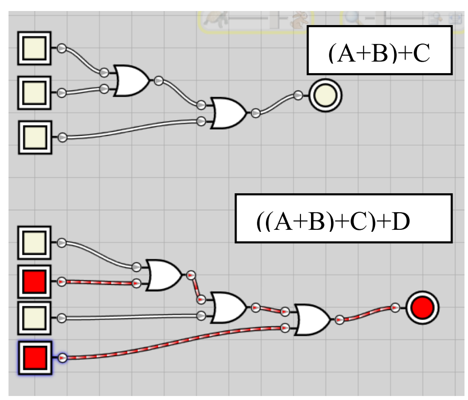
Soluzione:
Indicando esplicitamente la precedenza tra gli operatori, le formule diventano:

(A+B)+C , ((A+B)+C)+D) , (AB)C , ((AB)C)D)

Di seguito sono riportate raggruppate per brevità tutte e quattro le tabelle:

A	B	C	D	A+B+C	A+B+C+D	ABC	ABCD
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1		1		0
1	0	0	1		1		0
0	1	0	1		1		0
1	1	0	1		1		0
0	0	1	1		1		0
1	0	1	1		1		0
0	1	1	1		1		0
1	1	1	1		1		1

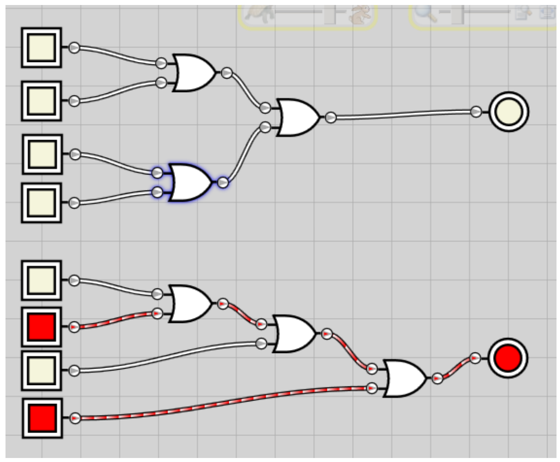




Massimo Marchi – marchi@dsi.unimi.it

4. **Si confrontino (se necessario) le tabelle della verità di A+B+C+D e (A+B)+(C+D). Si confrontino i due circuiti equivalenti. Quale circuito risulta essere più vantaggioso da implementare è perchè? Si faccia lo stesso confrontando ABCD e (AB)(CD). Alla luce di quanto dedotto si rivedano i circuiti creati al punto 3.**

Soluzione:
Il circuito Gatesim:



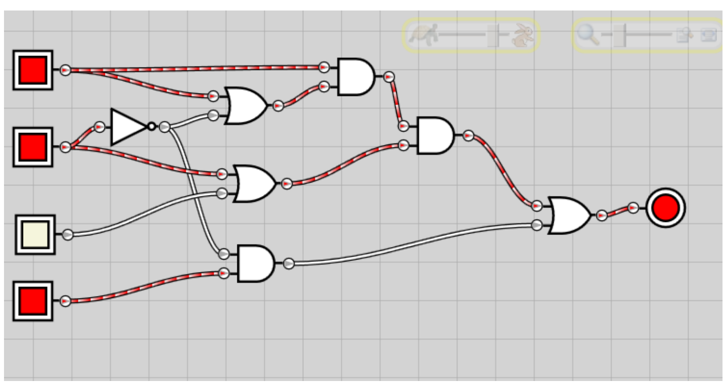
Si nota che il cammino critico di (A+B)+(C+D) è 2 mentre il cammino critico di ((A+B)+C)+D è 3. In entrambi i casi il costo è 3. Questo comportamento è valido in generale, per ogni numero di ingressi: è possibile ottenere un cammino critico minore rispetto all'implementazione in cascata riorganizzando le porte, pur mantenendo lo stesso costo.

5. **Sia Y=A(A + ~B)(B + C)+ ~BD una funzione logica. Si ricavi la tabella di verità e la SOP. Si implementino in Gatesim il circuito associato alla formula originale ed il circuito associato alla SOP e li si confrontino. Si proceda poi alla semplificazione algebrica della Y, si implementi il circuito corrispondente e lo si confronti con gli altri due circuiti implementati.**

Soluzione:
La tabella di verità:

A	B	C	D	~B	A+~B	B+C	~BD	A(A+~B)(B+C)	Y
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1

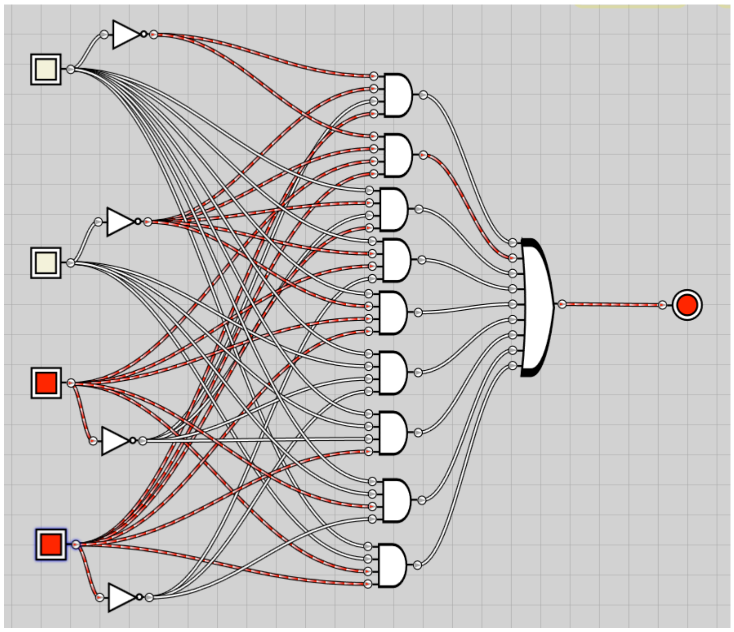
Il circuito della funzione originaria è il seguente:



La forma SOP è la seguente:

Y = (~A~B~CD)+(~A~BCD)
+(A~B~CD)+(A~BC~D)+(A~BCD)+(AB~C~D) +(AB~CD)+(ABC~D) +(ABCD)

Il circuito risultante è il seguente (*Gatesim ha difficoltà a maneggiare circiti cosi complessi, ne segue una certa lentezza nella commutazione delle porte*):



Semplifichiamo la funzione originaria partendo dalla SOP:

Y = (~A~B~CD)+(~A~BCD)
+(A~B~CD)+(A~BC~D)+(A~BCD)+(AB~C~D) +(AB~CD)+(ABC~D) +(ABCD)

applico varie volte **xy+x~y=x**

Y = ~A~BD +A~B~CD + A~BC~D + A~BCD + AB~C~D + AB~CD + ABC~D + ABCD

Y = ~A~BD + A~B~CD + A~BC + AB~C + ABC

Y = ~A~BD + A~B~CD + A~BC +AB

Y = ~A~BD + A(~B~CD + ~BC +B)

Y = ~A~BD + A(~B(~CD + C) +B)

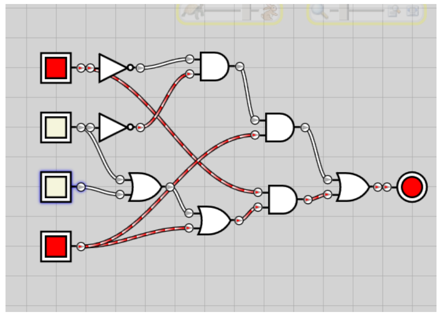
Nota: guardando la tabella si identificano a colpo d'occhio alcuni implicanti:
AB, ~A~BD
In aggiunta la parte inferiore della tabella è la funzione B+C+D.
Ne segue che una forma ridotta (non è detto che sia la migliore) della funzione è la seguente:
Y=~A~BD + A(B+C+D)

Y = ~A~BD + A(~B(D + C) +B) **x+~xy=x+y: x=C,y=D**

Y = ~A~BD + A((D + C) +B) **x+~xy=x+y: x=B,y=D+C**

Y = ~A~BD + A(B + C +D)

Y = ~A~BD + A(B + C +D)



Il circuito così ha costo 6 e cammino critico 4, provo a estrarre l'implicante AB per vedere se trovo una forma migliore:

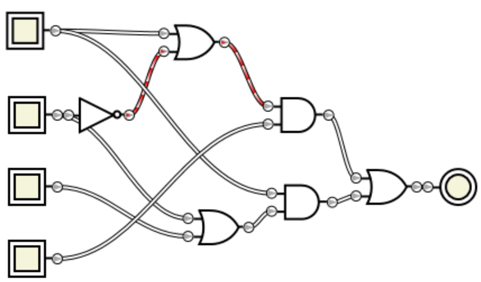
Y = ~A~BD + AB + AC +AD

Y = ~A~BD +AD + AB + AC

Y = (~A~B+A)D + A(B + C)

Y = (~B+A)D + A(B + C)

Il circuito così derivato ha costo 5 e cammino critico 3:



Possiamo derivare ulteriormente:

Y = (~B + A) D + A(B + C)

Y = (~B + A + AC) D+ A(B + C) assorbimento: **x**=**x**+**xy** (**x**=A,**y**=C)

Y = (~B + A1 + AC) D+ A(B + C) identità: **x**=**x**1 (**x**=A)

Y = [~B + A (~B + B) + AC] D + A(B + C) inverso: **x**+~**x**=1 (**x**=B)

Y = (~B + A~B + AB + AC) D + A(B + C) distributiva: **x**(**y**+**z**)= **xy**+**xz** (**x**=A,**y**=~B,**z**=B)

Y = (~B + AB + AC) D + A(B + C) assorbimento: **x**=**x**+**xy** (**x**=~B,**y**=A)

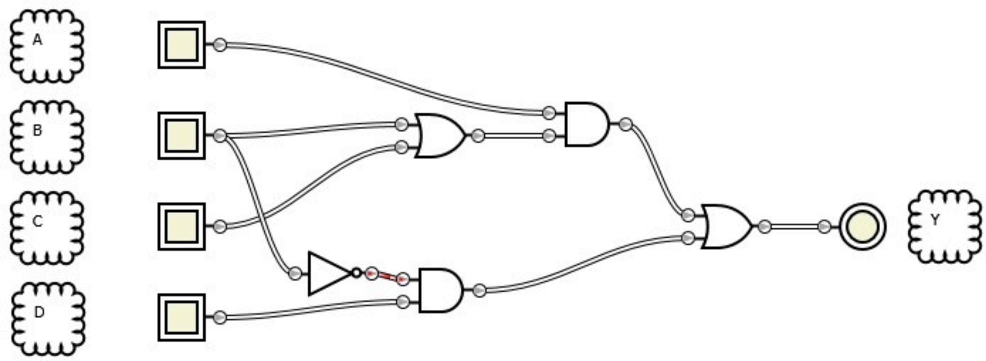
Y = [~B + A(B+C)]D + A(B + C) distributiva: **x**(**y**+**z**)=**xy**+**xz** (**x**=A,**y**=B,**z**=C)

Y = ~BD + A(B+C)D + A(B + C) distributiva: **x** (**y**+**z**)= **xy**+**xz** (**x**=D,**y**=~B,**z**=A(B+C))

Y = ~BD + A(B + C) assorbimento: **x**=**x**+**xy** (**x**=A(B+C),**y**=D)

Y = ~BD + A(B + C)

Il circuito così derivato ha complessità 4 e cammino critico 3:



Partendo dalla formula originale si può derivare quest'ultima in modo più semplice come segue:

Y = A(A + ~B)(B + C)+ ~BD

Y = (AA + A~B)(B + C)+ ~BD

Y = (A + A~B)(B + C)+ ~BD

Y = A(B + C)+ ~BD

Da notare che la derivazione **x**(**x** + **y**)=**x** e la duale di **x**+**xy**=**x**.